DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-285-291
УДК 517.977

К ИТЕРАЦИОННОМУ МЕТОДУ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

© И. В. Гребенникова

ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина»
620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19
E-mail: giv001@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача управления по минимаксному критерию для сингулярно возмущенной системы с запаздыванием по фазовым переменным при неопределенных начальных условиях и геометрических ограничениях на ресурсы управления. Предлагается процедура построения управляющего воздействия, аппроксимирующего оптимальное решение с заданной степенью точности относительно малого положительного параметра.
Ключевые слова: сингулярно возмущенная система с запаздыванием; оптимальное управление; фундаментальная матрица

Введение

В данной работе рассматриваются динамические объекты, математическими моделями которых являются сингулярно возмущенные системы с постоянным запаздыванием по фазовым переменным. Рассматривается задача управления по минимаксному критерию в постановке [1, 2] для сингулярно возмущенных систем с запаздыванием по фазовым переменным при неопределенных начальных условиях и геометрических ограничениях на управляющие воздействия. Терминальный функционал качества зависит как от быстрых, так и от медленных переменных. В основе предлагаемого метода лежат идеи выделения асимптотики ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы, предложенные А. Г. Кремлёвым в работе [3], но при отсутствии запаздывания и представления фундаментальной матрицы решений, разбитой на блоки в соответствии с размерностями быстрых и медленных переменных, в виде равномерно сходящейся последовательности. Оптимальное решение аппроксимируется с любой заданной точностью (относительного малого параметра), при этом не требуется чрезмерных условий гладкости (дифференцируемость не выше первого порядка), ограничений на класс допустимых управлений.

1. Основные понятия

Рассматривается управляемая сингулярно возмущенная система (с малым параметром $\mu > 0$) с запаздыванием $h > 0$ (по состоянию):

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)y(t) + G_{11}(t)x(t-h) + \mu G_{12}(t)y(t-h) + B_1(t)u(t), \\ \mu dy(t)/dt &= A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)y(t) + G_{21}(t)x(t-h) + \mu G_{22}(t)y(t-h) + B_2(t)u(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$; $x \in R^n$, $y \in R^m$; A_{ij}, B_i, G_{ij}, $i, j = 1, 2$ — матрицы соответствующих размеров с непрерывными элементами. Начальное состояние системы $x(t) = \psi_x(t)$, $t_0 - h \leq t < t_0$, $x(t_0) = x_0$, $y(t) = \psi_y(t)$, $t_0 - h \leq t < t_0$, $y(t_0) = y_0$ точно неизвестно, и заданы лишь ограничения $x_0 \in X_0$, $y_0 \in Y_0$, где X_0, Y_0 — выпуклые компакты в соответствующих пространствах, $\psi_x(t) \in \Psi_x(t)$, $\psi_y(t) \in \Psi_y(t)$, $t_0 - h \leq t < t_0$, $\Psi_x(t)$, $\Psi_y(t)$ — заданные многозначные отображения со значениями в виде выпуклых компактов (в R^n, R^m), непрерывные по t в метрике Хаусдорфа. Реализации управления $u(t)$, $t \in T$ — измеримые по Лебегу функции, удовлетворяющие условию $u(\cdot) \in P$, P — слабо компактное выпуклое множество в $L_2^r(T)$. В данном случае

$$P = \{u(\cdot) \mid u(t) \in P(t), t \in T\},$$

где $P(t)$ — заданное непрерывное, ограниченное, выпуклое многозначное отображение.

Будем предполагать выполненным следующее условие.

Условие 1. Корни $\lambda_s(t)$ характеристического уравнения $\left|A_{22}(t) - \mu\lambda E_m + \mu G_{22}(t)e^{-\lambda h}\right| = 0$, где E_m — единичная $m \times m$ матрица, удовлетворяют неравенству: $\mathrm{Re}\lambda_s(t) < -2c < 0$, при $t \in T$, $c = const > 0$.

Рассматривается минимаксная задача управления [1, 2]: среди управлений $u(\cdot) \in P$ найти оптимальное $u^0 = u^0(\cdot)$, доставляющее

$$\varepsilon^0(t_1, \mu) = J(u^0) = \min_{u(\cdot) \in P} J(u(\cdot)), \tag{2}$$

$$J(u(\cdot)) = \max_{z_0 \in Z_0} \max_{\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)} \varphi(z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))),$$

где $\varphi(\cdot)$ заданная выпуклая функция (с конечными значениями); $z' = (x', y')$, $\psi' = (\psi_x', \psi_y')$, $z(t, u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))$, $t \in T$ — решение системы (1), исходящее из $Z_0 = X_0 \times Y_0$ при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$, $\Psi = \Psi_x \times \Psi_y$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$.

Пусть $Z[t, \tau]$ есть фундаментальная матрица решений системы (1) ($u \equiv 0$) $Z[\tau, \tau] = E_{n+m}$, $Z[t, \tau] = 0$ при $\tau > t$.

Матрицу $Z[t, \tau]$ представим в следующем блочном виде:

$$Z[t, \tau] = \begin{pmatrix} Z_{11}[t, \tau] & Z_{12}[t, \tau] \\ Z_{21}[t, \tau] & Z_{22}[t, \tau] \end{pmatrix},$$

здесь $Z_{11}[t, \tau]$, $Z_{12}[t, \tau]$, $Z_{21}[t, \tau]$, $Z_{22}[t, \tau]$ — матрицы с размерами соответственно $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$.

2. Основные результаты

Для реализации итерационной процедуры [4] построения оптимального решения задачи (2) важно правильно выбрать начальную асимптотику.

В [4] приведены рекуррентные формулы для вычисления блоков $Z_{ij}^{(k)}[t,\tau]$ $(i,j=1,2)$, $k=0,1,2,\dots,$ определяющих асимптотику матрицы $Z[t,\tau]$ относительно малого параметра $\mu>0$:

$$Z_{11}^{(k+1)}[t,\tau]=X[t,\tau]-\int\limits_{\tau}^{t}(dZ_{12}^{(0)}[t,s]/ds)A_{22}^{-1}(s)(A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s,\tau]+G_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s-h,\tau])ds;$$

$$Z_{22}^{(k+1)}[t,\tau]=Y[t,\tau]+\int\limits_{\tau}^{t}Z_{21}^{(k)}[t,s](A_{12}(s)Y[s,\tau]+\mu G_{12}(s)Y[s-h,\tau])ds;$$

$$Z_{12}^{(k)}[t,\tau]=\int\limits_{\tau}^{t}Z_{11}^{(k)}[t,s](A_{12}(s)Y[s,\tau]+\mu G_{12}(s)Y[s-h,\tau])ds;$$

$$Z_{21}^{(k)}[t,\tau]=(1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t}Y[t,s](A_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s,\tau]+G_{21}(s)Z_{11}^{(k)}[s-h,\tau])ds;$$

предполагается существование $A_{22}^{-1}(t)$; причем $Z_{11}^{(0)}[t,\tau]=X[t,\tau], Z_{22}^{(0)}[t,\tau]=Y[t,\tau]$, где $X[t,\tau]$ — фундаментальная матрица решений вырожденной системы (система (1) при $\mu=0$), $X[\tau,\tau]=E_n$, $X[t,\tau]=0$, при $\tau>t$, $Y[t,\tau]$ — фундаментальная матрица решений системы

$\mu dy/dt=A_{22}(t)y(t)+\mu G_{22}(t)y(t-h)$, $Y[t,\tau]=0$, при $\tau>t$, $Y[\tau,\tau]=E_m$.

Вычисляя в соответствии с [4] при $0<\mu\le\mu_0$, μ_0 достаточно мало, имеем:

$$\varepsilon^0(t_1)=\varepsilon^{(k)}(t_1)+\mathrm{O}(\mu^{k+1}),$$

$$\varepsilon^{(k)}(t_1)=\max\{\chi^{(k)}(p,q)\mid p\in R^n,q\in R^m\}=\chi^{(k)}(p^{(k)},q^{(k)}),\tag{3}$$

$$\chi^{(k)}(p,q)=-h_{(k)}^{**}(p,q)-\int\limits_{t_0}^{t_1-\alpha_k(\mu)}\rho(-r_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q)\mid P(\tau))d\tau-$$
$$-\int\limits_{0}^{\alpha_k(\mu)/\mu}\rho(-r_2^{(k)}(s,t_1,p,q)\mid V(s))ds, V(s)=P(t_1-\mu s),$$

где $\alpha_k(\mu)>0$: $\alpha_k(\mu)=o(1)$, $\alpha_k(\mu)/\mu\to+\infty$ при $\mu\to+0$, причем функции $r_i^{(k)}(\tau,t_1,p,q)$, $i=1,2$, определяются следующим образом: при $t_0\le\tau\le t\le t_1-\alpha_k(\mu)$

$$r_1^{(k)}(\tau,t_1,p,q)=(p'Z_{11}^{(k)}[t_1,\tau]+\int\limits_{0}^{\alpha_k(\mu)/\mu}q'\Phi[t_1,s](A_{21}(t_1-\mu s)Z_{11}^{(k)}[t_1-\mu s,\tau]+$$
$$+G_{21}(t_1-\mu s)Z_{11}^{(k)}[t_1-\mu s-h,\tau])ds)B_0(\tau)-$$
$$-\frac{d}{d\tau}(p'Z_{12}^{(k-1)}[t_1,\tau]+\int\limits_{0}^{\alpha_k(\mu)/\mu}q'\Phi[t_1,s]A_{21}(t_1-\mu s)Z_{12}^{(k-1)}[t_1-\mu s,\tau]ds)A_{22}^{-1}(\tau)B_2(\tau),$$

при $0\le s<\alpha_k(\mu)/\mu$

$$r_2^{(k)}(s,t_1,p,q)=[q'\Phi[t_1,s]+\frac{d}{ds}(p'Z_{12}^{(k-1)}[t_1,t_1-\mu s]+$$
$$+\int\limits_{0}^{s}q'\Phi[t_1,\sigma]A_{21}(t_1-\mu\sigma)Z_{12}^{(k-1)}[t_1-\mu\sigma,t_1-\mu s]d\sigma)A_{22}^{-1}(t_1-\mu s)]B_2(t_1-\mu s)+\mu\xi(p,q,\mu),$$

здесь $\Phi[t_1,s]=Y[t_1,t_1-\mu s]$, $\xi(p,q,\mu)=\mathrm{O}(\mu^{k+1})$,

$$h_{(k)}(p,q)=\varphi^*(p,q)-\rho(p'Z_{11}^{(k)}[t_1,t_0]+\int\limits_{0}^{\alpha_k(\mu)/\mu}q'\Phi[t_1,s](A_{21}(t_1-\mu s)Z_{11}^{(k)}[t_1-\mu s,t_0]+$$

$+G_{21}(t_1-\mu s)Z_{11}^{(k)}[t_1-\mu s-h,t_0])ds \mid \mathrm{X}_0)-\rho(p'Z_{12}^{(k)}[t_1,t_0]+$
$+\int\limits_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} q'\Phi[t_1,s](A_{21}(t_1-\mu s)Z_{12}^{(k)}[t_1-\mu s,t_0]+G_{21}(t_1-\mu s)Z_{12}^{(k)}[t_1-\mu s-h,t_0])ds \mid Y_0)-$
$-\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\rho(r_{h_x}^{(k)}(\tau,t_1,p,q)|\Psi_x(\tau-h))d\tau-\int\limits_{t_0}^{t_0+h}\rho(r_{h_y}^{(k)}(\tau,t_1,p,q)|\Psi_y(\tau-h))d\tau,$
$r_{h_x}^{(k)}(\tau,t,p,q)=(p'Z_{11}^{(k)}[t,\tau]+q'Z_{21}^{(k)}[t,\tau])G_0(\tau)-$
$-\frac{d}{d\tau}(p'Z_{12}^{(k-1)}[t,\tau]+(1/\mu)\int\limits_{\tau}^{t_0+h}q'Y[t,s]A_{21}(s)Z_{12}^{(k-1)}[s,\tau]ds)A_{22}^{-1}(\tau)G_{21}(\tau);$
$r_{h_y}^{(k)}(\tau,t,p,q)=(p'Z_{11}^{(k)}[t,\tau]+q'Z_{21}^{(k)}[t,\tau])\mu G_{12}(\tau)+(p'Z_{12}^{(k)}[t,\tau]+q'Z_{22}^{(k)}[t,\tau])G_{22}(\tau);$
$\varphi^*(p,q)$ — функция, сопряженная к $\varphi(p,q)$; $h^{**}(p,q)=\overline{(co\,h)}(p,q)$ — замыкание выпуклой оболочки функции $h(p,q)$; $\rho(q|X)$ — опорная функция множества X на элементе q.

Рассмотрим управляющее воздействие $u_\mu^{(k)}(\cdot)$:

$$u_\mu^{(k)}(\tau)=\begin{cases} u^{(k)}(\tau), & t_0\le\tau\le t_1-\alpha_k(\mu),\\ v^{(k)}((t_1-\tau)/\mu), & t_1-\alpha_k(\mu)<\tau\le t_1,\end{cases}$$

$u^{(k)}(\cdot)$, $v^{(k)}(\cdot)$ определяются условиями:
при почти всех $\tau\in[t_0,t_1-\alpha_k(\mu)]$, $s\in[0,\alpha_k(\mu)/\mu)$

$$r_1^{(k)}(\tau,t_1,p^{(k)},q^{(k)})u^{(k)}(\tau)=\min_{u(\tau)\in P(\tau)} r_1^{(k)}(\tau,t_1,p^{(k)},q^{(k)})u(\tau),$$

$$r_2^{(k)}(s,t_1,p^{(k)},q^{(k)})v^{(k)}(s)=\min_{v(s)\in V(s)} r_2^{(k)}(s,t_1,p^{(k)},q^{(k)})v(s).$$

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*
1. Вырожденная система относительно управляема на T *(определение см. [5]);*
2. Для любого $t\in T$ $\operatorname{rank}\{B_2(t_1),\ A_{22}(t_1)B_2(t_1),...,\ A_{22}^{m-1}(t_1)B_2(t_1)\}=m$;
3. Максимум в (3) *достигается на векторе* $(l^{(k)})'=(p^{(k)'},q^{(k)'})$ *таком, что*

$$r_1^{(k)}(\tau,t_1,p^{(k)},q^{(k)})\ne 0,\ q^{(k)}\ne 0.$$

Тогда задача (2) *разрешима, причем при* $0<\mu\le\mu_0$, μ_0 *достаточно мало, управляющее воздействие* $u_\mu^{(k)}(\cdot)$ *доставляет оценку*

$$\varepsilon^0(t_1)=J(u^0(\cdot))=J(u_\mu^{(k)}(\cdot))+\mathrm{O}(\mu^{k+1}).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.

2. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.

3. *Kremlev A.G.* Asymptotic properties of trajectories of singularly perturbed system in the problem of optimal control // Автоматика и телемеханика. 1993. № 9. С. 61-78.

4. *Гребенникова И.В., Кремлев А.Г.* Итерационная процедура построения оптимального решения в минимаксной задаче управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием при геометрических ограничениях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16. Вып. 3. С. 272-280.

5. *Кириллова Ф.М., Чуракова С.В.* Относительная управляемость линейных динамических систем с запаздыванием // Доклады АН СССР. 1967. Т. 174. № 6. С. 1260-1263.

Поступила в редакцию 21 марта 2018 г.
Прошла рецензирование 23 апреля 2018 г.
Принята в печать 5 июня 2018 г.

Гребенникова Ирина Владимировна, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры информационных систем и технологий, e-mail: giv001@mail.ru.

Для цитирования: *Гребенникова И.В.* К итерационному методу построения оптимального управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием при геометрических ограничениях // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 285–291. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-285-291

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-285-291

TO THE ITERATIVE METHOD OF CONSTRUCTING OPTIMAL CONTROL OF A SINGULARLY PERTURBED SYSTEM WITH DELAY WITH GEOMETRIC CONSTRAINTS

I. V. Grebennikova

Ural Federal University named after first President of Russia B.N. Yeltsin
19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation
E-mail: giv001@mail.ru.

Abstract. The control problem for the singularly perturbed system with delay with indeterminate initial conditions and geometric constraints on the control resources according to the minimax criterion is considered. Procedure of constructing control response that approximates the optimal solution with given accuracy with respect to a small positive parameter is proposed.
Keywords: singularly perturbed system with delay; optimal control; fundamental matrix.

REFERENCES

1. Krasovskiy N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [The Theory of Motion Control]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 475 p. (In Russian).

2. Kurzhanskiy A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and Observation Under the Uncertainty Conditions]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 392 p. (In Russian).

3. Kremlev A.G. Asymptotic properties of trajectories of singularly perturbed system in the problem of optimal control. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1993. no. 9. pp. 61-78.

4. Grebennikova I.V., Kremlev A.G. Iteratsionnaya protsedura postroeniya optimal'nogo resheniya v minimaksnoy zadache upravleniya singulyarno vozmushchennoy sistemoy s zapazdyvaniem pri geometricheskikh ogranicheniyakh [Iterative Procedure of Constructing Optimal Solving in the Minimax Problem of Control for Singularly Perturbed System with Delay with Geometric Constraints]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika – Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2016, vol. 16, no. 3, pp. 272-280. (In Russian).

5. Kirillova F.M., Churakova S.V. Otnositel'naya upravlyaemost' lineynykh dinamicheskikh sistem s zapazdyvaniem [Relative controllability of linear dynamic systems with delay]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1967, vol. 174, no. 6, pp. 1260-1263. (In Russian).

Received 21 March 2018
Reviewed 23 April 2018
Accepted for press 5 June 2018

Grebennikova Irina Vladimirovna, Ural Federal University named after first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, the Russian Federation, Senior Lecturer of the Information Systems and Technologies Department, e-mail: giv001@mail.ru.

For citation: Grebennikova I.V. K iteratsionnomu metodu postroeniya optimalnogo upravleniya singulyarno vozmuschennoy sistemoy s zapazdivaniem pri geometricjeskih ogranicheniyah [To the iterative method of constructing optimal control of a singularly perturbed system with delay with geometric constraints]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 285–291. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-285-291 (In Russian, Abstr. in Engl.).